## بسمه تعالی

# نقد و بررسی مبحث حد و پیوستگی کتاب حساب و دیفرانسیل و انتگرال چاپ۹۰

## مقدمه :

**در سال تحصیلی ۸۹-۸۸ کتاب حسابان فعلی تدوین و مورد تدریس قرار گرفت ، در این کتاب تعریف حد را متفاوت از تعریف قبلی نوشته اند.این تغییر باعث شد تا در سال تحصیلی ۹۱-۹۰ مبحث حد و پیوستگی کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال قبلی (فصل سوم کتاب ) تغییر کند و محتوی آن هماهنگ بابحث حد و پیوستگی حسابان فعلی گردد.**

**تغییر رویکرد در تعریف حد باعث بروز یک سری اشکالات در استفاده از قضایای حد و پیوستگی شده است.**

**در این جزوه اشکالات موجود بررسی و در پایان هر مورد اصلاح پیشنهادی ارائه گردید.**

**اما مشکلات ناشی از عدم هماهنگی بین رشته ریاضی با سایر رشته های دبیرستانی از یک طرف و با دانشگاه ازطرف دیگری در آموزش حد و پیوستگی نیز مطرح است که باید برای آن فکر دیگری کرد.**

## تعریف حد :

**تعریف کامل و منطقی حد در صفحه ۴۳ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۹۰ آورده شده است.**

**در این تعریف شرط لازم وجود حد تابع f در a آن است که f حداقل در یکی از همسایگی های یکطرفه a تعریف شده باشد.**

**یعنی $D_f$ شامل بازه ای مانند $(a,a+\delta)$ یا $(a-\delta \quad , \quad a)$ برای $\delta > 0$ باشد.در حالیکه در تعریف قبلی شرط لازم وجود حد f در a تعریف شدن f در همسایگی محذوف a می باشد.یعنی دامنه f شامل یک همسایگی محذوف a باشد.**

**ضمناً در نکته ۲ صفحه ۴۶ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۹۰ تصریح می کند اگر f فقط در یک همسایگی راست( یا چپ ) a تعریف شده باشد حد راست (حد چپ) f در a همان حد f در a است.**

**این تفاوت مهم در دو تعریف (تعریف قبلی حد f در a و تعریف فعلی حد f در a ) از وجود حد f در a است.**

**لذا تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بنابر تعریف فعلی در $x=0$ حد دارد.ولی بنا بر تعریف قبلی این تابع در $x=0$ حد ندارد. البته اگر f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد دو تعریف یکسان عمل می کنند.مسلماً دقت نظر معلمین محترم در این مورد از اخلال در آموزش ریاضی جلوگیری کرده و دانش آموزان متضرر نمی شوند.ضمن اینکه سوالات امتحانی و کنکور در خصوص حد و پیوستگی هماهنگ با تعریف جدید حد طراحی خواهد شد.**

# ایرادهای وارده

**۱ -بررسی هندسی تعریف حد از حساب و دیفرانسیل و انتگرال ۹۰ صفحه ۴۴.**

**در بررسی هندسی حد $\lim_{x\to a} f(x) = l$ می نویسد « برای هر $\varepsilon$ همسایگی L یک $\delta$ همسایگی محذوف a موجود است که تصویر هر نقطه ی این $\delta$ همسایگی محذوف در داخل $\varepsilon$ همسایگی $L$ قرارگیرد »**

**ایراد: ممکن است حد فوق یکطرفه باشد در این صورت تصویر هر نقطه ی این $\delta$ همسایگی محذوف مطرح نیست .**

**اصلاح پیشنهادی : تصویر هر نقطه ی مشترک دامنه ی $f$ با این $\delta$ همسایگی محذوف $a$ در داخل $\varepsilon$ همسایگی $L$ قرار گیرد و به جای یک شکل سه شکل رسم شود یا اینکه معلم محترم در تدریس سه شکل رسم کند .**

**۲ حد چپ و راست : صفحه ی ۴۵ کتاب حساب فعلی :**

**برای تعریف حد چپ و راست فرض می کند که تابع $f$ در یک همسایگی $a$ تعریف شده باشد و این شرط لازم وجود حد چپ و حد راست $f$ در نقطه $a$ می باشد .**

**ایراد: در کتاب حسابان سال ۸۹ شرط لازم وجود حد راست $f$ در $a$ را تعریف شدن $f$ در همسایگی مانند ( $a,a+\delta$ ) و شرط لازم وجود حد چپ $f$ در نقطه ی $a$ را تعریف شدن $f$ در یک همسایگی چپ مانند ( $a-\delta,a$) می داند.یعنی تعریف حد چپ و راست $f$ در $a$ در دو کتاب حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال هماهنگ نیست .**

**اصلاح پیشنهادی : شرط لازم وجود حدهای یکطرفه $f$ در $a$ را تعریف شدن $f$ در همسایگی یک طرفه $a$ (حسب مورد) قرار دهیم یعنی تعریف حسابان را قبول کنیم .**

**برای روشن تر شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:**

**مثال: فرض کنید**

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ 5 + x & x \in \text{مجموع اعداد گنگ منفی} \end{cases}$$

**واضح است که هر همسایگی چپ صفر شامل نقاطی از اعداد گویای منفی است که تابع $f$ در آن نقاط تعریف نشده است .لذا تابع $f$ در هر همسایگی چپ صفر تعریف نشده است ، اما این تابع در همسایگی راست صفرتعریف شده است و بعلاوه $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ پس بنا بر تعریف حد در حسابان و تذکر۲ صفحه‌ی ۴۶ کتاب حساب فعلی داریم: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ در حالیکه بنا بر تعریف منطقی حد ( صفحه ۴۳ ) حساب فعلی حد این تابع در صفر مساوی صفر نیست. زیرا با فرض (فرض خلف)$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ برای ۰/۰۱= $\varepsilon$ عدد مثبت $\delta$ موجود است بطوریکه برای $X$ های در دامنه $f$ و با شرط ۰<|x|<$\delta$ باید۰/۰۱>|f(x)| در حالیکه می توان عدد گنگ منفی $r$ را چنان در نظر گرفت که بقدر کافی نزدیک صفر باشد. بطوریکه اولا $\delta$ > |r| و ثانیا ۴<۵+r لذا مقدار |f(r)|=|۵+r| از ۰/۰۱ بیشتراست و لذا تابع $f$ در صفر حدی برابر صفر ندارد.**

**برای اصلاح این تناقض بین حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشنهادمی گردد قرارداد صفحه ۱۵۰ حسابان و نکته ۲ صفحه ۴۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال فعلی بصورت زیر تغییر کند :**

**قرارداد:** اگر تابع $f$ در یک همسایگی راست نقطه $a$ تعریف شده باشد و یک همسایگی چپ $a$ موجود باشد بطوریکه $f$ در هیچ نقطه از این همسایگی چپ تعریف شده نباشد ، آنگاه حد راست $f$ در $a$ در صورت وجود، حد تابع $f$ در $a$ می باشد .
بطور مشابه اگر $f$ در یک همسایگی چپ نقطه ی $a$ تعریف شده باشد و یک همسایگی راست $a$ موجود باشد بطوریکه $f$ در هیچ نقطه از این همسایگی راست تعریف شده نباشد آنگاه حد چپ $f$ در $a$ در صورت وجود،حد تابع $f$ در $a$ است .
با قبول تغییر بالا تابع $f$ تعریف شده در مثال فوق در صفر حد ندارد زیرا هر همسایگی چپ صفر بی شمار نقاط از دامنه $f$ را شامل است. لذا حد راست $f$ در صفر نمی تواند بجای حد $f$ در صفر مطرح شود.

**۳- دنباله ها و حد صفحه ۴۷ از حساب فعلی :**

در سطر دوم از این صفحه در توضیح نقیض شرط لازم وجود حد ادامه می دهد (( بنابراین اگر تابع f در یک همسایگی چپ a یا در یک همسایگی راست a تعریف نشده باشد در آن نقطه حد ندارد ))

**ایراد** : بکار بردن سور وجودی در نقیض شرط لازم وجود حد باعث ایجاد مثال نقض مانند مثال زیر می شود.

**مثال** : تابع $f(x)=\sqrt{x^3-x}$ با دامنه $D_f= [ -۱ , ۰ ] \cup [ ۱ , +\infty )$ در یک همسایگی راست ( ۰ , ۲ ) و در یک همسایگی چپ ( ۰ , ۲- ) از صفر تعریف نشده است اما $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ موجود است .

**اصلاح پیشنهادی** : نوشته شود (( بنابر این اگر تابع f در هیچیک از همسایگی راست a و در هیچیک از همسایگی چپ a تعریف شده نباشد آنگاه تابع f در a حد ندارد.))

**۴- در قضیه ۴ در صفحه ۵۱ و قضیه ۷ در صفحه ۵۲ از کتاب حساب فعلی به صراحت قید کند که توابع f و g مشترکا حداقل در یکی از همسایگی های یکطرفه a تعریف شده باشند. یا شرط کند که اشتراک دامنه های f و g حداقل یکی از همسایگی های یکطرفه a را شامل باشد. در غیر این صورت مثال زیر این قضایا را نقض می کند.**

**مثال** : $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ را در نظر بگیرید این توابع در a = ۲ حدی برابر صفر دارند در حالیکه توابع f +g و f − g و f.g در a =۲ حد ندارند . زیرا $D_f \cap D_g = [ ۳ , +\infty ) \cup \{2\}$ .

**۵ – در قضیه ۸ صفحه ۵۲ حساب هیچ شرطی برای f و g ندارد .که در این صورت مثال نقضی برای این قضیه مانند مثال زیر وجود دارد.**

**مثال** : فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}+2$ و $g(x)=\sqrt{x^2-3x}+۷$ واضح است که $\lim_{x\to 0} f(x)=2$ و $\lim_{x\to 0} g(x)=7$ اما $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ قابل طرح نیست . زیرا دامنه $f/g$ عبارت است: $\{0\} \cup [۳,+\infty)$.

**اصلاح پیشنهادی** : فرض اینکه (( دامنه تابع $f/g$ شامل حداقل یک همسایگی یکطرفه a باشد )) به قضیه اضافه گردد.

و یا فرض شود که توابع f و g مشترکاحداقل در یکی از همسایگی های یکطرفه a تعریف شده باشند.

۶ - قضیه ۵ صفحه ۵۱ از حساب فعلی:

قضیه ۵: اگر تابع fدر نقطه aدارای حد باشد انگاه در یک همسایگی aکراندار است.

**ایراد**: ممکن است حد fدر aیک طرفه باشد که در این صورت کرانداری fدر یک همسایگی aمنتفی است.

**اصلاح پیشنهادی**: اگر تابع fدر نقطهa حد داشته باشد آنگاه fدر اشتراک همسایگی a با دامنه f کراندار است.

**تذکر**: قابل توجه است که وقتی قضیه ۵ را به صورت M و δ مطرح می کند اصلاح فوق رعایت شده است.

اما در اینجا نیز $0<|x-a|$ ضرورتی ندارد زیرا در صورتی که f(a) تعریف شده باشد یک عدد است که به کراندار بودن f خللی وارد نمی شود.

۷ - بهتر است اصلاح زیر در مورد قضیه ۹ صفحه ۵۲ کتاب حساب فعلی طرح گردد تا این قصیه کامل تر شود.

**اصلاحیه**: ۱ - در قسمت (ب) نوشته شود:اگر n زوج و $l > 0$ آنگاه:$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

۲- قسمت (پ) به صورت زیر به این قضیه اضافه گردد:

(پ):اگر n فرد باشد آنگاه $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

۸– تمرین ۴ از حساب فعلی صفحه ۵۴ :

**ایراد**:اگر حد یکطرفه باشد آنگاه مثبت یا منفی بودن f در یک همسایگی محذوف aمنتفی است.

**اصلاح پیشنهادی** : بجای عبارت (( f در یک همسایگی محذوف a ))نوشته شود f دراشتراک دامنه f با یک همسایگی محذوفa .

۹-قضیه ۱۱ از حساب فعلی صفحه ۵۸:

در این قضیه نیزمانند قضایای قبلی به جای آنکه گفته شود((توابع f و g روی دامنه مشترکی تعریف شده باشند))نوشته شود:((توابعfوg مشترکاً،حداقل در یکی از همسایگی یک طرفه a تعریف شده باشند.))تا شاهد مثال های نقض مانند مثالی که در بند ۵ از صفحه ۳ این جزوه اورده شده است نباشیم.

**۱۰- قضیه ۱۲ حساب فعلی از صفحه ۵۹ و نتیجه آن:**

**ایراد:** **مثال زیر این قضیه را نقض میکند.**

**مثال:** **فرض کنید $f(x)=\sqrt{-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ داریم: $\lim_{x\to 1} g(x)=0$ و f در صفر پیوسته است اما $\lim_{x\to 1} fog(x)$ مطرح نیست زیرا $D_{fog}=\{۱\}$ .**

**اصلاح پیشنهادی:** **در این قضیه شرط اینکه دامنه *fog* شامل حداقل یکی از همسایگی های یکطرفه *a* باشد، اضافه گردد.**

**۱۱-نکته صفحه ۶۱ از کتاب حساب فعلی:**

**ایراد:** **با توجه به تعریف فعلی حد و پیوستگی نامنفی بودن *f* در تمامی یک همسایگی *x*. لازم نیست.بلکه همسایگی یکطرفه کفایت می کند.**

**اصلاح پیشنهادی:** **این نکته به سه نکته زیر تبدیل شود:**

**نکته۱:** **فرض کنید تابع *f* در نقطه a پیوسته و *f(a)* مثبت باشد در این صورت (n∈ N) $\lim_{x\to a} \sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{f(a)}$**

**یعنی تابع $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ در a پیوسته است.**

**نکته ۲:** **فرض کنید تابع *f* در نقطه a پیوسته و مقادیر *f* حداقل در یکی از همسایگی یکطرفه *a* نامنفی و *f(a)=۰* باشد.**

**آنگاه : (n∈ N) $\lim_{x\to a} \sqrt[2n]{f(x)}=0$ یعنی تابع $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ در a پیوسته است.**

**نکته ۳:** **فرض کنید f در نقطه a پیوسته باشد آنگاه $\lim_{x\to a} \sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{f(a)}$ یعنی تابع $y=\sqrt[2n+1]{f(x)}$ در a پیوسته است.**

**۱۲-تمرین ۵ از صفحه ۶۲ کتاب حساب:**

**آیا مجموع یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته می تواند پیوسته باشد؟چرا؟**

**ایراد: در این تمرین تابع پیوسته یعنی تابعی که در کل دامنه اش پیوسته باشد.در حالی که هدف تمرین پیوستگی در یک نقطه است.**

**اصلاح پیشنهادی:** **اگر تابع f در a پیوسته و تابع g در a ناپیوسته باشد ، آیا تابع f+g می توانددر a پیوسته باشد؟چرا؟**

**تذکر:در تمرین فوق باید توجه داشت که جواب این تمرین در حساب قبلی منفی بوده است.اما این تمرین در حساب فعلی جواب**

مثبت دارد.به مثال زیر توجه کنید:

**مثال**: فرض کنید f(x)=$\sqrt{x}$ و g(x)=$\begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$ لذا (f+g)=۱+$\sqrt{x}$ و $D_{f+g}$=[۰,∞) واضح است که تابع fدر صفر پیوسته است و تابع g در صفر پیوسته نیست اما تابع f+g در صفر پیوسته است.

**۱۳**-نکته ۱ صفحه ۷۴ حساب فعلی:

ایراد: این نکته بصورت قضیه دوشرطی بیان شده است در حالیکه قضبه شرطی است.

**مثال**:فرض کنید f(x)=$\frac{1}{\sqrt{x}}$ داریم :$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ولی $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ مطرح نیست.

**اصلاح پیشنهادی**: نکته فوق را بصورت زیر نوشته شود:

الف)ار $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

ب)اگر $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

تذکر:عکس موارد فوق برقرارنیست.چرا؟

**۱۴**-قضایای ۱۹،۲۰،و۲۱ از صفحه های ۷۷و ۷۸ حساب فعلی:

**ایراد**: مثال زیر این قضایا را نقض می کند:

**مثال**: فرض کنید f(x)=$\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ و g(x)=$\sqrt{x^2-5x+6}+3$ واضح است که $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to 2} g(x) = 3$ اما $\lim_{x\to 2}(f+g)(x) \neq \infty$ و $\lim_{x\to 2}(f.g)(x) \neq \infty$ زیرا$D_f\cap D_g$=[۳,+∞)

**اصلاح پیشنهادی** : در این قضایا شرط ((توابع gوf مشترکاً حداقل در یکی از همسایگی های یکطرفه a تعریف شده باشند.))اضافه گردد.و یا شرط کنیم که $D_f\cap D_g$ شامل حداقل یکی از همسایگی های یکطرفه aباشد.

**۱۵**-تعریف پیوستگی تابع f در یک نقطه صفحه ۵۶ حساب فعلی :

دراینجا تعریف طوری بیان شده است که توابعی مانند f(x)=$\begin{cases} 3 & x = 5 \\ \sqrt{x-8} & x \geq 8 \end{cases}$ در x=۵پیوسته است .

**اصلاح پیشنهادی**: برای پرهیز از ایراد وارده وایجاد هماهنگی باحسابان فعلی پیشنهاد می گردد دراین تعریف شرط اینکه «تابع fدرx=aوحداقل در یکی از همسایگی های یکطرفه x=aتعریف شده باشد» به عنوان شرط لازم اضافه گردد وسپس استلزام منطقی موجود آورده شود.

**درپایان** ضمن تشکر و قدر دانی از زحمات مولفین محترم و دبیران و همکاران عزیز بخاطر تلاش فراوان در امر آموزش نظام جمهوری اسلامی ایران عزیز، از همکاران محترم در خواست می شود جزوه حاضر را بدقت مطالعه فرمایندواصلاحیه های پیشنهادی آنرا در تدریس رعایت کنندومارا از نقطه نظرات ارزنده شان بی نصیب نسازند.

**با تشکر فراوان :گروه ریاضی ناحیه دو ساری**

**شماره تماس: رحیم بردیده - احمد جولایی**